Gymnasium Ernestinum Coburg

Kollegstufe Abiturjahrgang 1988

F A C H A R B E I T

aus der Mathematik

Ein Verfahren zur Trisektion eines Winkels

Verfasser	: Frank Reisenhofer
Leistungskurs	: Mathematik 2
Kursleiter	: OStR Fahnler
Bearbeitungszeitraum	: Kurshalbjahre 12/2 und 13/1
Abgabetermin	: 12.Februar 1988

Erzielte Note :

Erzielte Punkte :

(einfache Wertung)

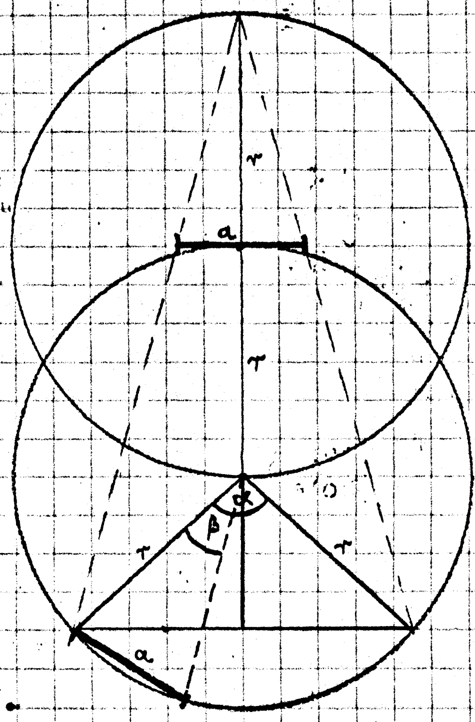
Abgabe des Ergebnisses:

....

(Unterschrift Kursleiter)

Facharbeitsthemen (März 1987)

1. Ein erstes Verfahren zur Dreiteilung eines beliebigen Winkels, vorgeschlagen von Dr. Heinz Hector (1977).



Der Winkel α ist beliebig zwischen 0° und 180°. Durch nebenstehende Konstruktion erhält man den Winkel β, der angenähert der dritte Teil von ist.

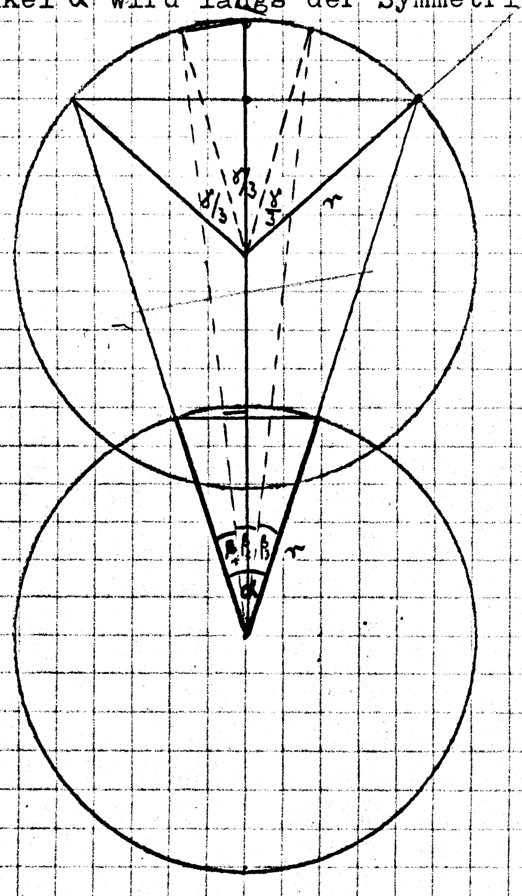
a. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen β und α her.

b. Untersuchen Sie die Genauigkeit der angegebenen Konstruktion: Vergleichen Sie verschiedene Werte von α mit den entsprechenden Werten von $3\cdot\beta$ (evtl. mit Hilfe eines Computers).

c. Berechnen Sie das Maximum der auftretenden Abweichungen.

2. Ein zweites Verfahren zur Dreiteilung eines beliebigen Winkels, vorgeschlagen von Dr. Heinz Hector (1978).

Nebenstehende Figur ist symmetrisch zur Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte. Der Winkel γ im oberen Kreis ist ein exakt vorgedrittelter Hilfswinkel. Der beliebig zwischen 0° und 180° vorgegebene Winkel α wird längs der Symmetrieachse so verschoben, daß die gezeichneten Endpunkte seiner Schenkel mit den Endpunkten der Schenkel von γ zusammenfallen. Verbindet man nun die Endpunkte der Schenkel von $\frac{\gamma}{3}$ mit dem Mittelpunkt des unteren Kreises, so entstehen die Winkel β_1, β_2, β_3, die angenähert gleich dem dritten Teil von α sind.



a. Berechnen Sie allgemein β_2 in Abhängigkeit von α und γ.

b. Untersuchen Sie die Genauigkeit der angegebenen Konstruktion: Vergleichen Sie mit Hilfe eines Computerprogramms verschiedene Werte von α mit den entsprechenden Werten von $3\cdot\beta_2$ (jeweils unter Berücksichtigung verschiedener Hilfswinkel γ und geben Sie ein Rezept an, in welcher Größenordnung γ zu wählen ist, damit man ein möglichst genaues Ergebnis für β erhält.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

1. Die Winkelteilung

1.1. Möglichkeiten der Winkelteilung

Betrachtet man den Themenbereich, den die Geometrie behandelt, so stellt man fest, daß die Längen- und Winkelmessung eine wichtige Rolle einnimmt. Man begnügt sich aber nicht damit, eine Streckenlänge, z.B. die Entfernung zweier Punkte, oder einen Winkel, z.B. zwischen zwei Geraden, mit Hilfe verschiedener Meßinstrumente, wie einem Geodreieck, zu bestimmen.

Seit den Anfängen der Geometrie versucht man vielmehr auch, bestimmte Winkel zu konstruieren, ohne dabei einen Winkelmesser zu benutzen, also nur mit Zirkel und Lineal. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Winkelteilung. Gemeint ist damit der Versuch, einen beliebig vorgegebenen Winkel α in bestimmte Teilwinkel aufzuspalten. Bei einer Halbierung des Ausgangswinkels (Verfahren siehe Anhang A) gibt es keine allzugroßen Schwierigkeiten. Ohne sich aufwendige Konstruktionen überlegen zu müssen, kann man mit Hilfe des gleichen Verfahrens einen Winkel auch in vier gleiche Teile zerlegen, indem man zunächst den Ausgangswinkel halbiert und anschließend die entstandenen Teilwinkel ebenfalls in zwei Teile aufspaltet. Dieses Verfahren kann man - solange es die Zeichengenauigkeit zuläßt - beliebig oft wiederholen, sodaß man jeden Teilwinkel konstruieren kann, für den gilt: $\beta = \alpha/2\hat{}I$ $(i \in N)$

Aufwendiger aber werden die Verfahren bereits bei der Dreiteilung eines beliebig vorgegebenen Winkels (Trisektion des Winkels). Eine Trisektion ist jedoch im allgemeinen Fall nicht exakt durchführbar. Es gibt aber einige Winkel, die sich ohne aufwendigere Verfahren in drei gleichgroße Teilwinkel aufspalten lassen. Zu ihnen zählen z.B. der 180° , 90° und 45°Winkel, da man ihre Teilwinkel 60°, 30°und 15° mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

-

1.2. Trisektion eines Winkels nach Dr. Heinz Hector

Da man aber jeden beliebigen Winkel - wenn auch nur näherungsweise- in drei gleichgroße Teilwinkel teilen wollte, wurden im Laufe der Zeit zahlreiche Hilfskonstruktionen enwickelt. Ein Verfahren zur Trisektion eines beliebigen Winkels, das von Dr. Heinz Hector 1978 vorgeschlagen wurde, soll im nun Folgenden behandelt werden.

Dieses Verfahren weist eine Besonderheit auf, denn zur Dreiteilung eines beliebigen Winkels zwischen 0° und 180° vorgegebenen Winkels wird ein Hilfswinkel γ verwendet. Dieser ist ein exakt vorgedrittelter Winkel. Einen solchen Winkel kann man sich mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren, indem man jeweils einen Schenkel eines beliebigen Ausgangswinkels am anderen Schenkel spiegelt (Verfahren siehe Anhang A). Da diese Spiegelung exakt durchgeführt werden kann, erhält man einen Winkel, der genau aus drei gleichgroßen Winkeln besteht. In welcher Größenordnung dieser Hilfswinkel liegen soll, wird in einem späteren Abschnitt behandelt.

Um nun den Ausgangswinkel dritteln zu können, fährt man nun folgendermaßen fort. Man zieht einen Kreis R1 mit einem frei wählbaren Radius r um den Scheitel des vorgedrittelten Winkels. Auf diese Weise ergeben sich die vier Schnittpunkte B, C, D und E zwischen dem Kreis und den vier Schenkeln des Hilfswinkels (Zeichnung siehe Anhang B). Zeichnet man sich nun die Winkelhalbierende ein und verlängert diese beliebig weit in beide Richtungen - auch über den Scheitelpunkt hinaus -, so erhält man die Symmetrieachse, an der entlang der zu drittelnde Winkel solange verschoben wird, bis die beiden Schenkel des Winkels die beiden äußeren Schenkel des Hilfswinkels genau in den beiden Punkten schneiden, die Schnittpunkte dieser beiden Schenkel mit dem Kreis R1 darstellen. Der zu teilende Winkel wird nun dadurch, daß man den Scheitelpunkt des Winkels jeweils mit den Schnittpunkten der inneren Schenkel des Hilfswinkels mit dem Kreis verbindet, in drei Teile aufgeteilt.

2. Herleitung einer Beziehung für den Winkel β_2

Daß diese Teile ungefähr dem dritten Teil des beliebig zwischen $0°$ und $180°$ vorgegebenen Winkels entsprechen, kann nun rechnerisch dadurch nachgewiesen werden, daß man versucht, eine Formel für einen der drei entstandenen Teilwinkel herzuleiten, die es ermöglicht, diesen Winkel in Abhängigkeit von den bekannten Größen zu ermitteln. Bekannt ist die Größe des Hilfswinkels und die des zu drittelnden Winkels. Der Radius r sollte jedoch in der Endformel nicht mehr vorhanden sein, da er bei der Konstruktion beliebig frei wählbar ist. Daher wäre es widersprüchlich, wenn der Radius in dieser Beziehung noch vorhanden wäre, denn dies würde bedeuten, daß der entstandene Teilwinkel doch abhängig vom Radius wäre.

Es stellt sich nun die Frage, ob man für zwei einzelne Teilwinkel nachweisen muß, daß sie je ungefähr ein Drittel mal so groß sind wie der Ausgangswinkel, oder ob es genügt nur für einen Winkel einen Beweis zu führen. Wenn man sich überlegt, daß die entstandene Figur symmetrisch bezüglich der Geraden ist, die sowohl durch den Scheitelpunkt des Hilfswinkels als auch durch den des zu drittelnden Winkels geht, so kann man zu der Erkenntnis gelangen, daß es genügt, den Beweis auf den mittleren Teilwinkel des Ausgangswinkels β_2 zu beschränken. Denn die Symmetrieachse teilt den zu drittelnden Winkel ebenso wie den mittleren Teilwinkel genau in zwei gleichgroße Winkel. Für die beiden anderen Winkel β_1 und β_3 gilt also jeweils:

$$\beta_1 = \beta_3 = \alpha:2 - \beta_2:2$$

Sie sind also folglich gleich groß. Wenn nun nachgewiesen ist, daß $\beta_2 \sim \frac{\alpha}{3}$, so kann man diese Beziehung in die Gleichung für β_1 und β_3 einsetzen und erhält: $\beta_1 = \beta_3 = \alpha/3$

Um nun β_2 allgemein in Abhängigkeit von α und γ berechnen zu können, muß man einige Hilfsstrecken sowie einen zweiten Kreis in die bisherige Konstruktion einzeichnen. Zunächst zieht man um den Scheitel des Ausgangswinkels α einen Kreis mit dem gleichen Radius r wie um den Scheitel A des Hilfswinkels. So ergeben sich die Punkte H und L als

Schnittpunkte zwischen dem Kreis R2 und den beiden äußeren Schenkeln von α . Fällt man nun von L aus das Lot auf die Winkelhalbierende, so erhält man den Punkt I als Fußpunkt auf der Symmetrieachse und die Strecke $\overline{LI}$. Indem man vom Punkt C aus, dem Schnittpunkt des äußeren Schenkels des Hilfswinkels mit dem Kreis R1, ebenso das Lot auf die Symmetrieachse zieht, bekommt man auf dieser den Punkt F. Die so entstandenen Dreiecke $\triangle CGF$ und $\triangle LGI$ sind aufgrund des ersten Ähnlichkeitssatzes über Dreiecke ähnlich. Dieser besagt, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. Genau diese Bedingung ist für die Dreiecke erfüllt, denn es gilt:

1. $\sphericalangle GIL = \sphericalangle GFC = 90°$ (Von C und I wird jeweils ein Lot auf die ~~auf die~~ Winkelhalbierende gefällt)
2. $\sphericalangle CGF = \sphericalangle LGI = \alpha/2$

Ähnliche Dreiecke stimmen aber auch in den Verhältnissen entsprechender Seiten überein. Es muß folglich gelten:

$$\overline{CF}/\overline{FG} = \overline{IL}/\overline{IG} \qquad (\text{ Gl. 1 })$$

Überlegt man sich nun, wie die gesuchten Strecken vom Radius r und den gegebenen Winkeln abhängen, kann man folgende drei Zusammenhänge erkennen:

1. $\sin(\gamma/2) = \overline{CF}/\overline{AC} \quad => \quad \overline{FC} = r*\sin(\gamma/2)$

   Im rechtwinkligem Dreieck $\triangle AFC$ entspricht das Verhältnis von Gegenkathete $\overline{FC}$ und der Hypotenuse $\overline{AC}$ (= r) des Winkels $\gamma/2$ dem Sinuswert des Winkels.

2. $\sin(\alpha/2) = IL/GL \quad => \quad \overline{IL} = r*\sin(\alpha/2)$

   Diese Beziehung ist in dem rechtwinkligem Dreieck $\triangle GIL$ gültig, da der Quotient aus der Gegenkathete $\overline{IL}$ und der Hypotenuse $\overline{GL}$ nach Definition gleich dem Sinuswert des Winkels $\alpha/2$ sein muß.

3. $\cos(\alpha/2) = \overline{IG}/\overline{GL} \quad => \quad \overline{IG} = r*\cos(\alpha/2)$

   Der Cosinus des Winkels $\alpha/2$ ist nach Vereinbarung gleich dem Verhältnis seiner Ankathete zu seiner Hypotenuse.

Setzt man nun die gefundenen Beziehungen in die Gleichung 1 ein, kürzt einmal den Radius r und lößt diese Formel nach der noch fehlenden Strecke $\overline{FG}$ auf, so gilt:

$$\overline{FG} = (r*\sin(\gamma/2)*\cos(\alpha/2))/\sin(\alpha/2)$$
$$= r*\sin(\gamma/2)/\tan(\alpha/2) \qquad (\text{ Gl. } 2 \text{ })$$

Für weitere überlegungen zeichnet man sich nun zwei weitere Hilfsstrecken in die Konstruktion ein. Zum einen fällt man von dem Punkt D - einer der Schnittpunkte zwischen einem inneren Schenkels des Hilfswinkels und dem Kreis R1 - ein Lot auf die Symmetrieachse. Auf diese Weise ergibt sich der Punkt Q als Fußpunkt auf der Symmetrieachse und somit ebenfalls die Strecke $\overline{DQ}$. Zum anderen ergibt sich eine Strecke $\overline{KN}$ dadurch, daß man auf der Winkelhalbierenden im Punkt K - der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit dem Kreis R2 - ein Lot errichtet. Schneidet man dieses Lot mit dem Schenkel $\overline{GD}$ des durch Konstruktion gedrittelten Winkels, so ergibt sich der Punkt N als Schnittpunkt. Auf diese Weise kann man in der Zeichnung wiederum zwei ähnliche Dreiecke erkennen, nämlich ΔGKN und ΔGQD. Diese sind ebenfalls aufgrund des ersten Ähnlichkeitssatzes ähnlich, denn es gilt:

1. $\measuredangle DGQ = \measuredangle KGN = \beta/2$
2. $\measuredangle GKN = \measuredangle GQD = 90°$ ($\overline{LQ}$ und $\overline{KN}$ sind jeweils Lote auf der Winkelhalbierenden)

Auch in diesen beiden ähnlichen Dreiecken müssen die Verhältnisse entsprechender Seiten übereinstimmen.

Demzufolge muß gelten:

$$\overline{DQ}/\overline{GQ} = \overline{KN}/\overline{GK} \qquad (\text{ Gl. } 3 \text{ })$$

Sucht man nach Beziehungen zwischen den bekannten Größen und den Strecken in Gleichung 3, so lassen sich zwei erkennen:

1. $\sin(\gamma/6) = \overline{DQ}/\overline{AD} \quad \Rightarrow \quad \overline{DQ} = r*\sin(\gamma/6)$

   Der Sinuswert des Winkel $\gamma/6$ im rechtwinkligem Dreieck ΔDAQ entspricht dem Verhältnis der ~~Ankathete~~ Gegenkathete $\overline{DQ}$ zur Hypotenuse $\overline{AD}$ (= r).

2. $\tan(\beta/2) = \overline{KN}/\overline{GK} \quad \Rightarrow \quad \overline{KN} = r*\tan(\beta/2)$

   Diese Beziehung ist in dem rechtwinkligem Dreieck ΔGKN gültig, denn das Verhältnis der Gegenkathete $\overline{KN}$ des Winkels ΔKGN zur Ankathete $\overline{GK}$ (= r) muß dem Tangens dieses Winkels entsprechen. Diese beiden Beziehungen setzt man in die Gleichung 3 ein. So folgt, wenn man die Gleichung nach $\overline{GQ}$ auflößt und r kürzt:

$\overline{GQ} = r*\sin(\gamma/6)/\tan(\beta_2/2)$ (Gl. 4)

Nun wäre es gut, wenn es eine Beziehung zwischen $\overline{GQ}$ und $\overline{GF}$ (bzw. zwischen Gl. 2 und Gl. 3) geben würde, da diese beiden Strecken in den bisherigen Gleichungen noch unbekannt sind.

Eine solche erhält man, indem man die Differenz dieser beiden Strecken bestimmt. Diese muß, wie man in der Zeichnung (s.h. Anhang B) erkennen kann, der Strecke $\overline{FQ}$ entsprechen.

Es gilt also: $\overline{GQ} - \overline{GF} = \overline{FQ}$ (Gl. 5)

Diese Strecke $\overline{FQ}$ kann man aber ebenfalls in Abhängigkeit von den gegebenen Größen (r, α, γ) bestimmen. Denn man erhält diese unbekannte Strecke, wenn man die Differenz der Strecken $\overline{AQ}$ und $\overline{AF}$ bildet.

Folgende Beziehung muß erfüllt sein: $\overline{FQ} = \overline{AQ} - \overline{AF}$ (Gl. 6)

Für die fehlenden Strecken $\overline{AQ}$ und $\overline{AF}$ ergibt sich jeweils eine eindeutige Beziehung.

1. $\cos(\gamma/6) = \overline{AQ}/\overline{AD}$ => $\overline{AQ} = r*\cos(\gamma/6)$

   Diese Gleichung tritt im rechtwinkligem Dreieck ΔADQ auf. Hier ist das Verhältnis der Ankathete $\overline{AQ}$ des Winkels $\sphericalangle$DAQ zur Hypotenus $\overline{AD}$ (= r) mit dem Cosinuswert identisch.

2. $\cos(\gamma/2) = \overline{AF}/\overline{AC}$ => $\overline{AF} = r*\cos(\gamma/2)$

   Um auf diese Formel zu kommen, betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ΔACF. Das Verhältnis der Ankathete $\overline{AF}$ des Winkels$\sphericalangle$CAF zur Hypotenuse $\overline{AC}$ (= r) muß gemäß der Definition dem Cosinus dieses Winkels entsprechen.

Diese beiden Beziehung setzt man nun in die Gleichung 6 ein. So erhält man: $\overline{FQ} = r*\cos(\gamma/6)-r*\cos(\gamma/2)$

$= 2*\sin(\gamma/3)*\sin(\gamma/6)\cdot r$ (vgl. FS. S. 39.8)

Fügt man diese Formel in die Gleichung 5 ein, ergibt sich folgender Zusammenhang: $\overline{GQ} - \overline{GF} = 2*r*\sin(\gamma/3)*\sin(\gamma/6)$

Setzt man nun für $\overline{GQ}$ die Gleichung 4 und für $\overline{GF}$ die Gleichung 2 ein, so gilt folgende Beziehung:

$$r*\sin(\gamma/6)/\tan(\beta_2/2)-r*\sin(\gamma/2)/\tan(\alpha/2) = 2*r*\sin(\gamma/3)*\sin(\gamma/6)$$

Gekürtzt mit r:

$$\sin(\gamma/6)/\tan(\beta_2/2)-\sin(\gamma/2)/\tan(\alpha/2)=2*\sin(\gamma/3)*\sin(\gamma/6)$$

In dieser Gleichung sind lediglich die bekannten Winkel α und γ sowie der Winkel β_2, für den wir ja eine Beziehung in Abhängigkeit von α und γ herleiten wollen. Diese erhält man nun, wenn man diese Gleichung nach β_2 auflößt.

$$\boxed{\beta_2 = 2\cdot\arctan\frac{\sin(\gamma/6)\cdot\tan(\alpha/2)}{\sin(\gamma/2)+2\cdot\sin(\gamma/3)\cdot\sin(\gamma/6)\cdot\tan(\alpha/2)}}$$

3.Die Genauigkeit der Konstruktion

3.1. Mögliche Untersuchungskriterien

Mit Hilfe dieser Formel ist man in der Lage, diese von Dr. Heinz Hector vorgeschlagene Konstruktion hinsichtlich ihrer Genauigkeit zu untersuchen. Als Untersuchungskriterien für die Genauigkeit kann man den absoluten Fehler, den relativen Fehler sowie den prozentualen Fehler, die sich bei der Konstruktion ergeben, heranziehen.

Der absolute Fehler errechnet sich dadurch, daß man den Betrag der Differenz aus dem Sollwert - also $\alpha/3$ - und dem konstruierten Winkel bestimmt. Dieser Fehler gibt also an, um wieviel Grad sich der konstruierte Winkel vom tatsächlichen unterscheidet. Diese Art Fehlerberechnung hat jedoch den Nachteil, daß man einzelne Winkel, die gedrittelt werden sollen, nicht miteinander vergleichen kann. Denn eine absolute Abweichung von beispielsweise 1° würde bei einem Winkel von 5° eine wesentlich höhere Ungenauigkeit bedeuten als bei einem Winkel von 150°. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, bildet man den Quotienten aus dem absoluten Fehler und dem Sollwert. Auf diese Weise ergibt sich der relative Fehler. Da man aber die Abweichung häufig in Prozent angibt, multipliziert man diesen relativen Fehler mit 100% und errechnet sich so den prozentualen Fehler, der nun aussagt, um wieviel Prozent sich der konstruierte Winkel vom Sollwert unterscheidet. Bei seinen Untersuchungen verwendet man also am besten zum Vergleich den prozentualen Fehler und den absoluten Fehler der Konstruktion.

Da man bei dieser Konstruktion von Dr. Heinz Hector zahlreiche umfangreiche Rechnungen durchführen muß - die Formel für den Winkel beinhaltet 21 Rechenschritte -, um die Genauigkeit zu untersuchen, bedient man sich am besten eines Computerprogrammes, da dieses die Rechenoperation sowohl schneller als auch sicherer ausführen kann.

3.2 Das Computerprogramm für die Untersuchungen

Ein geeignetes Programm (Listing s.h. Anhang D), das in GW Basic geschrieben wurde und demzufolge auf dem Commodore PC 20-II lauffähig ist, ist folgendermaßen aufgebaut:

Zunächst definiert man die für den Winkel β_2 gefundene Formel als Funktion g(y,b). Anschließend initialisiert man die Variablen PI und UR. PI muß definiert werden, da dem Rechner der Wert der Kreiszahl (=3.14152654) nicht bekannt ist, während UR dazu dient, einen in Altgrad gegebenen Winkel in Bogenmaß umzurechnen, da die Winkelfunktionen (sin,cos,tan und arctan) vom Computer nur in Bogenmaß berechnet werden können. Im Hauptmenü (vgl. Z. 30-190) wird dem Anwender die Möglichkeit gegeben, zwischen zwei Menüpunkten zu wählen. Entscheidet man sich für den erste Menüpunkt, so gelangt man in das Unterprogramm Fehlerberechnung (Z. 200-450), in dem der Computer den absoluten und den prozentualen Fehler berechnet. Dazu ist er jedoch nur in der Lage, wenn der Benutzer dem Rechner mitteilt, welchen Winkel er in gleichgroße Teile zerlegen möchte, und wie groß der Hilfswinkel sein soll, der bei der Konstruktion zur Verfügung steht. Bei der Eingabe des Hilfswinkels hat man die Möglichkeit, für diesen Winkel ein Intervall anzugeben, in dem der Hilfswinkel mit einer bestimmten Schrittweite variieren soll. Möchte man die Genauigkeit nur für einen Hilfswinkel untersuchen, gibt man diesen bei der Frage nach dem Intervall durch Komma getrennt zweimal ein, und teilt dem Rechner eine Schrittweite verschieden von Null mit. Diese Werte stehen dem Computer dann in den Variablen WI, MI, MA und SW zur Verfügung.

Nun kann das Programm den absoluten und prozentualen Fehler nach den genannten Formeln in Abhängigkeit des Hilfswinkels berechnen. Hat der Hilfswinkel alle Werte im Intervall [MI,MA] mit der Schrittweite SW angenommen und am Bildschirm angezeigt, gelangt der Anwender wiederum ins Hauptmenü.

In diesem Menü hat der Anwender jedoch noch eine zweite Möglichkeit. Wählte er mittels entsprechenden Tastendrucks diese, so gelangte er in das Unterprogramm Winkelbestimmung. Hier berechnet der Computer dem Anwender alle die Hilfswinkel, für die ein bestimmter absoluter oder prozentualer Fehler bei der Konstruktion nicht überschritten wird. Dies ist besonders dann interessant, wenn dem Anwender ein bekannter Winkel vorliegt, den er dritteln möchte, und er sich jetzt überlegt, welchen Hilfswinkel er verwenden kann, damit seine Konstruktion eine bestimmte Genauigkeit erreicht.

Um das günstige Intervall des Hilfswinkels bestimmen zu können, muß dem Rechner zunächst mitgeteilt werden, welchen Winkel man zu dritteln gedenkt, ob die Genauigkeit der Konstruktion bezüglich des absoluten oder des prozentualen Fehlers vorgegeben werden soll und letztlich welche maximale Abweichung bei der Konstruktion auftreten darf. Diese Daten stehen dem Programm nach der Eingabe in den Variablen WI,J und AB zur Verfügung.

Bevor aber Berechnungen durchgeführt werden können, müssen die Variablen RW(t) und Z initialisiert werden. Z gibt dabei an, der wievielte Randwinkel , d.h. der Winkel bei denen gerade die maximale zulässige Abweichung AB auftritt, gerade berechnet wird. Der errechnete Winkel wird in der eindimensionalen Variable RW gespeichert. Um die Randwinkel ermitteln zu können, verfährt man folgendermaßen. Man spaltet das Intervall des Hilfswinkels]0,360[in vier Teilintervalle auf, nämlich]0,WI], [WI,1.5*WI], [1.5*WI,2*WI] und [2*WI,360[. Der Grund hierfür, daß man gerade diese Winkel als Teilintervalle benutzt, ist darin zu sehen, daß - wie genauere Untersuchungen der Genauigkeit zeigen werden - die Konstruktion die niedrigste Abweichung dann aufweist, wenn der Hilfswinkel genau so groß bzw. doppelt so groß ist wie der zu drittelnde Winkel. Betrachtet man Hilfswinkel im Intervall [WI,2*WI], so erhält man für den Winkel 1.5*WI die größte Ungenauigkeit. Deshalb benutzt man diesen Winkel ebenfalls als Intervallgrenze. Im jeweiligen Intervall fällt bzw. steigt die Ungenauigkeit von einer Intervallgrenze zur anderen monoton.

Diese Intervallgrenzen werden in den Variblen G1 und G2 gespeichert. Der Hilfsvariable V wird ein geeigneter Wert zugewiesen. Dieser ist -1 falls G1<G2 und +1 wenn G1>G2. Nun wird das Unterprogramm Intervallschachtelung aufgerufen. Dieses Programm bedient ,um sich den Randwinkel zu bestimmen, des Intervallschachtelungsprinzipes, d.h. das Intervall, in dem der Hilfswinkel liegen kann, wird pro Durchlauf enger begrenzt. Das Unterprogramm kann allerdings sofort wieder verlassen werden, falls für den Winkel G1 die gewünschte Abweichung erfüllt ist. Ist dies der Fall, so wird dieser Winkel G1 dem momentan zu ermittelten Randwinkel RW(t) zugewiesen und die Zählvariable ~~I~~ Z um den Wert eins erhöht, bevor das Unterprogramm verlassen wird.

In den meisten Fällen wird der Winkel G1, der dem Unterprogramm übergeben wurde, die gewünschte Ungenauigkeit noch nicht aufweisen. Hierbei muß der Randwinkel erst genauer eingegrenzt werden.

Das Programm muß zunächst eine geeignete Schrittweite bestimmen, mit der er im Intervall [G1,G2] den zu untersuchenden Winkel erhöht bzw. erniedrigt. Diese erhält man, indem man betrachtet, wieviel stellig die Differenz aus den beiden Randwerten vor dem Komma ist. Ist diese z.B. zweistellig, so ist es am günstigsten, wenn man in 10er Schritten beginnt das Intervall zu untersuchen, da hierbei das Intervall durch wenige Vergleiche rasch verkleinert werden kann. Ist die Differenz jedoch einstellig, so verwendet man günstigerweise 1er Schritte als Startwert. Diese Ermittelung leistet die Zeile 880. -I gibt den Exponenten von 10 an. Der Wert 10^-I ist also der Wert der geeigneten Schrittweite. Diese wird bei weiteren Untersuchungen dadurch verkleinert, daß der Exponent pro Durchlauf jeweils um eins erniedrigt wird (Z.910, Z.980), bis eine bestimmte Eingrenzung des Intervalls ermittelt worden ist (Z.890). Bei unserem Programm ist dies dann der Fall, wenn der Wert G1 dem Wert G2 bis auf vier Stellen hinter dem Komma entspricht. Solange diese Genauigkeit nicht erreicht ist, durchläuft das Programm die Zeilen 900-980. Zu Beginn werden hierbei die Variablen G3 und H initialisiert. G3 gibt dabei die Schrittweite an, mit der im Intervall [G1,G2] der betrachtete Winkel variiert werden soll. Anschließend sucht das Programm im Intervall [G1,G2] mit der Schrittweite G3 solange, bis es den ersten Winkel ermittelt, der eine kleinere oder gleichgroße Abweichung hinsichtlich des absoluten oder prozentualen Fehlers wie die gewünschte Abweichung AB aufweist. Die Variable J teilt dem Computer dabei mit, ob das Untersuchungskriterium der absolute Fehler oder der prozentuale verwendet wird. Ist deren Inhalt gleich Null, dann erhält man die Formel für den absoluten Fehler, ist diese jedoch eins, dann ergibt sich die Formel für den prozentualen Fehler. Der Wert des ermittelten Winkels T wird nun in der Hilfsvarible H2 zwischengespeichert, während der Wert des vorher untersuchten Winkels (also: T-G3*V) der Variable H1 zugeordnet wird. Ebenso wird die Schleifenvariable T auf ihren Maximalwert gesetzt, um die Schleife sofort abzubrechen. Nach Beendigung der Schleife werden die Grenzen des zu untersuchenden Intervalls [G1,G2] dadurch neu gesetzt, daß H1 die neue untere Grenze G1 und H2 die neue obere Grenze bildet. Ebenso wird die Zählvariable I um den Wert ein erhöht (Z.980). Ist eine bestimmte Genauigkeit erreicht, so wird der Inhalt der Varible G2 dem zu ermittelten

Randwinkel zugeordnet, sowie die Zählvariable Z um eins erhöht (Z.1000) und das Unterprogramm verlassen.

3.3. Auswertung der Konstruktionsgenauigkeit

Um die Genauigkeit der Konstruktion mittels des Computerprogrammes zu analysieren, kann man etwa wie folgt vorgehen. Man entscheidet sich im Hauptmenü des Programmes für den ersten Menüpunkt. Anschließend teilt man dem Programm einen beliebigen Winkel zwischen 0° und 180° mit, der mit Hilfe der zu untersuchenden Konstruktion gedrittelt werden soll. Diesen Winkel verändert man bei späteren Untersuchungen unter sonst gleichen Voraussetzungen. Als nächstes gibt man ein Intervall, in dem der Hilfswinkel liegen soll, sowie eine günstige Schrittweite an. Zu Beginn untersucht man, um einen groben überblick zu bekommen, das Intervall]0;360[mit einer Schrittweite von eins. Hierbei stellt man, wenn man später kleiner Intervallbereiche untersucht, folgendes Genauigkeitsverhalten fest. Variiert man den Hilfswinkel von der untersten Grenze (etwa 0) bis zu einem Winkel, der dem zu drittelten Winkel etwa entspricht, so nimmt der absolute und somit auch der prozentuale Fehler kontinuierlich ab. Entspricht der Hilfswinkel dem zu drittelten Winkel, so ist die Abweichung, berücksichtigt man die Rundungsungenauigkeit des Computers, null - also minimal. Dies deckt sich auch mit der Vorstellung, denn man kann sich leicht überlegen, daß in diesem Fall der zu drittelnde Winkel genau auf dem Hilfswinkel zu liegen kommt. Also müssen sich auch die einzelnen Schenkel überdecken. Da der Winkel zwischen den einzelnen Schenkeln genau dem dritten Teil des Hilfswinkels entsprechen, müssen auch die entstandenen Teilwinkel des zu drittelnden Winkels dem dritten Teil des Ausgangswinkels entsprechen.

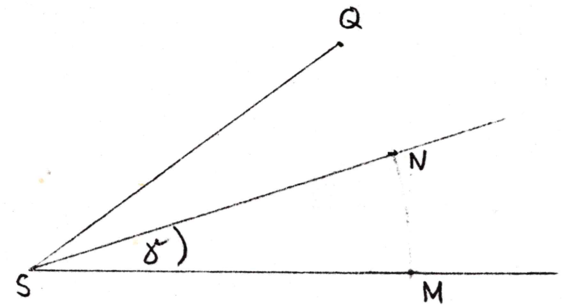
Schaut man sich Hilfswinkel im Intervall $[\alpha;2*\alpha]$ an, so nimmt die Ungenauigkeit zunächst kontinuierlich zu bis zu einem Winkel von etwa $1.5*\alpha$, während sie anschließend bis zu dem Winkel $2*\alpha$ monoton fällt. Hier ist die Abweichung der Konstruktion ebenfalls minimal, d.h. der absolute und prozentuale Fehler ist null. Betrachtet man die übrigen verwendbaren Winkel $([2*\alpha;360[)$, so nimmt die Ungenauigkeit mit der Größe des Winkels bis zum Erreichen der oberen Grenze zu. Die Konstruktion ist also dann am genauesten, wenn man Hilfswinkel verwendet, die etwa genau so groß bzw. doppelt so groß sind wie der zu drittelnde Winkel.

Zu diesem Ergebnis kommt man auch, wenn man das 2. Untermenü verwendet. Dieses verwendet zwar diese Erkenntnis bereits, sie aber wird in diesem nur verwendet, um die Rechenzeit zu verkür~~t~~zen. Hierbei geht man am besten so vor, daß man die zulässige Abweichung der Konstruktion bei gleichbleibenden zu drittelnden Winkel immer mehr verkleinert. Im Anhang C finden Sie hierzu die Tabelle 1. Diese zeigt die Untersuchungsergebnisse hinsichtlich des absoluten Fehlers für die Winkel 10°, 36°, 62°, 88°, 114°, 140° und 166°. Diese wurden gewählt, weil diese den zulässigen Bereich des zu drittelnden Winkels $(]10;180[)$ sehr gut abdecken. Der Tabelle 2 können sie das Ergebnis der Untersuchungen bzgl. des prozentualen Fehlers entnehmen. Man kann leicht erkennen, daß das Intervall des möglichen Hilfswinkels um so enger eingegrenzt wird, je kleiner die zulässige Abweichung ist. Dabei ergeben sich allmählich zwei Intervalle - besonders gut sieht man dies bei Verwendung von relativ großen Winkeln -, die in etwa symmetrisch um den Winkel bzw. um den Winkel liegen. Dies hat für den Anwender zur Folge, daß ihm immer weniger Winkel zur Verfügung stehen, die er als Hilfswinkel verwenden kann, wenn er eine sehr genaue Konstruktion wünscht. Vor allem aber in der Physik begnügt man sich mit Meßwerten, die einen prozentualen Fehler von 5 Prozent aufweisen. Begnügt man sich also als Anwender dieser Konstruktion ebenfalls mit einer solchen Ungenauigkeit, so kann man bereits eine recht große Zahl von Hilfswinkel verwenden, die zu dieser Abweichung führen. Welche Hilfswinkel ~~man~~ unter diesem Gesichtspunkt zur Verfügung stehen, kann man der Tabelle 3 entnehmen. Für jeden ganzzahligen Winkel zwischen 1°

und 180° findet man in dieser die möglichen verwendbaren Hilfswinkel, die zu einem prozentualen Fehler von 5 Prozent führen.

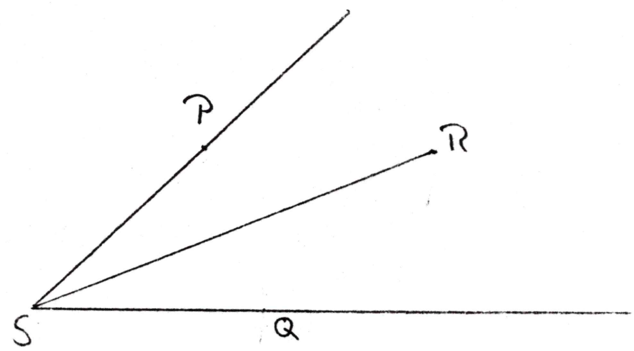
ANHANG B

Verdoppelung eines Winkels:

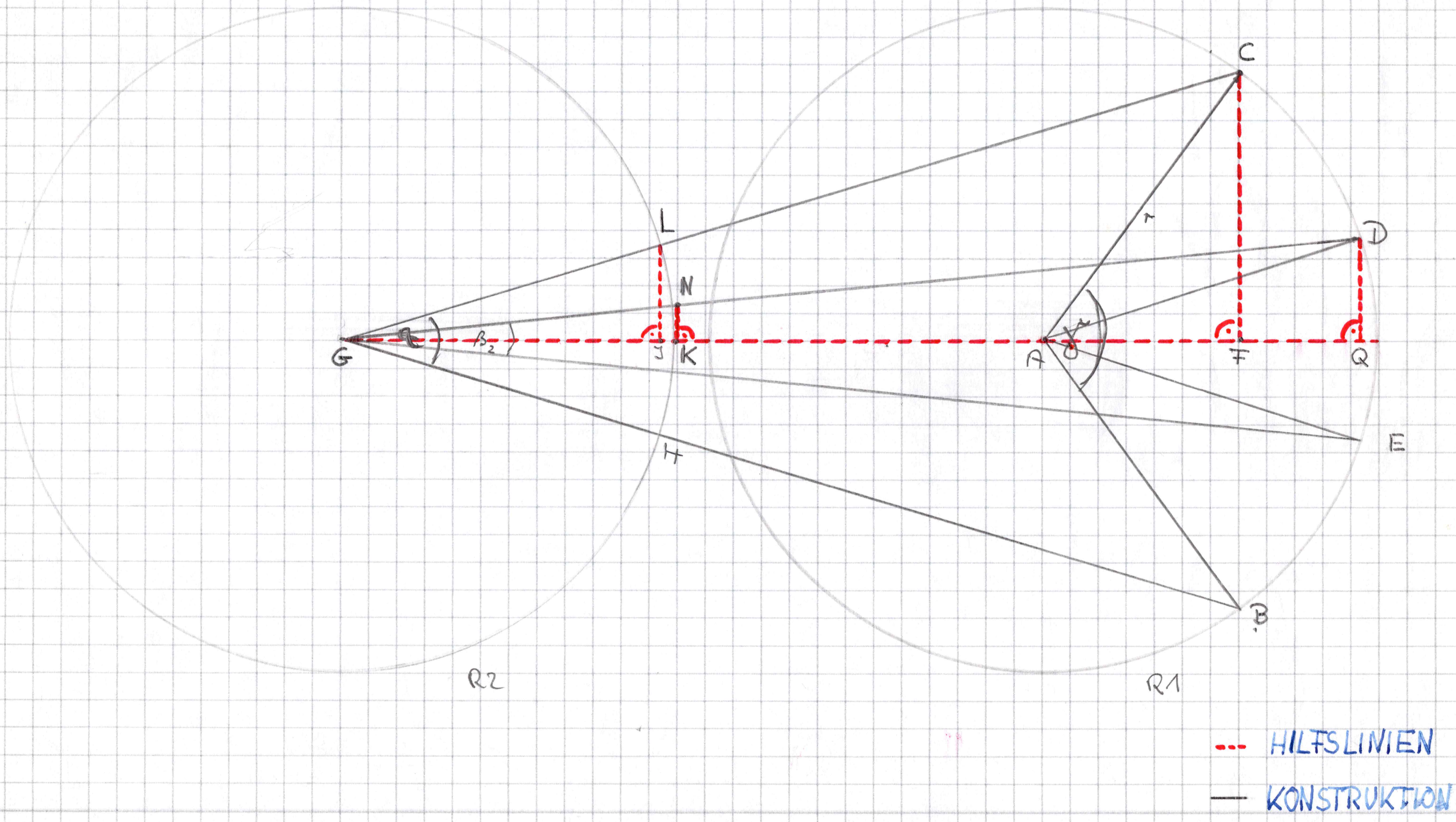


Der Winkel kann dadurch verdoppelt werden, daß man um den Scheitel S einen Kreis mit beliebigen Radius r zieht. Dieser schneidet die Schenkel in den beiden Punkten M und N. Zieht man nun um einen der beiden Punkte einen Kreis mit dem Radius der der Länge der Strecke MN entspricht, so ergibt sich ein Schnittpunkt Q zwischen den Kreisen. Diesen Punkt verbindet man nun mit dem Scheitel S.

Halbierung eines Winkels:



Eine Halbierung des Winkels erhält man, indem man um den Scheitel S einen Kreis mit beliebigen Radius r zieht. So ergeben sich die Punkte P und Q als Schnittpunkte des Kreises mit den Schenkeln. Zeichnet man dann zwei gleichgroße Kreise um P und Q, so erhält man den Punkt R als Schnittpunkt. Verbindet man nun S mit R, so ergibt sich die Winkelhalbierende.


C
D
E
B
A
F
Q
G
J
K
L
N
H
r
β_2
R1
R2
HILFSLINIEN
KONSTRUKTION

ANHANG C

Tabelle 1

ABSOLUTE ABWEICHUNG	ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL
0.01	10.00	0.00 , 32.03
	36.00	34.07 , 38.16 / 69.84 , 73.92
	62.00	61.34 , 62.67 / 123.32 , 124.66
	88.00	87.68 , 88.32 / 175.68 , 176.31
	114.00	113.82 , 114.18 / 227.82 , 228.18
	140.00	139.89 , 140.11 / 279.89 , 280.11
	166.00	165.93 , 166.07 / 331.93 , 332.07
0.05	10.00	0.00 , 51.58
	36.00	27.77 , 80.23
	62.00	58.82 , 65.55 / 120.44 , 127.17
	88.00	86.43 , 89.63 / 174.36 , 177.57
	114.00	113.10 , 114.91 / 227.08 , 228.90
	140.00	139.44 , 140.56 / 279.43 , 280.56
	166.00	165.63 , 166.37 / 331.63 , 332.36
0.10	10.00	0.00 , 66.31
	36.00	21.60 , 86.40
	62.00	55.93 , 69.66 / 116.34 , 130.07
	88.00	84.91 , 91.34 / 172.66 , 179.09
	114.00	112.21 , 115.85 / 226.14 , 229.79
	140.00	138.88 , 141.14 / 278.86 , 281.12
	166.00	165.26 , 166.74 / 331.25 , 332.73
0.50	10.00	0.00 , 124.42
	36.00	0.00 , 116.18
	62.00	38.24 , 147.76
	88.00	74.29 , 109.51 / 154.49 , 189.71
	114.00	105.59 , 124.69 / 217.90 , 236.40
	140.00	134.58 , 145.97 / 274.03 , 285.41
	166.00	162.39 , 169.83 / 328.17 , 335.61
1.00	10.00	0.00 , 162.52
	36.00	0.00 , 138.86
	62.00	22.53 , 163.47
	88.00	63.51 , 200.49
	114.00	98.29 , 137.38 / 204.61 , 243.71
	140.00	129.61 , 152.67 / 267.33 , 290.39
	166.00	158.96 , 173.91 / 324.09 , 339.04
5.00	10.00	0.00 , 267.76
	36.00	0.00 , 222.18
	62.00	0.00 , 229.27
	88.00	11.64 , 252.36
	114.00	58.18 , 283.81
	140.00	99.24 , 320.76
	166.00	136.37 , 232.31 / 265.68 , 360.00

ANHANG C

Tabelle 2

PROZENTUALE ABWEICHUNG	ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL
0.10	10.00	4.35 , 25.65
	36.00	33.71 , 38.62 / 69.37 , 74.28
	62.00	60.65 , 63.41 / 122.58 , 125.35
	88.00	87.07 , 88.95 / 175.05 , 176.93
	114.00	113.31 , 114.69 / 227.30 , 228.68
	140.00	139.47 , 140.53 / 279.47 , 280.52
	166.00	165.59 , 166.41 / 331.59 , 332.40
0.50	10.00	0.00 , 36.58
	36.00	26.42 , 81.58
	62.00	55.74 , 69.96 / 116.03 , 130.25
	88.00	83.54 , 93.01 / 170.99 , 180.46
	114.00	110.65 , 117.58 / 224.41 , 231.35
	140.00	137.41 , 142.70 / 277.29 , 282.58
	166.00	163.98 , 168.09 / 329.91 , 334.02
1.00	10.00	0.00 , 45.06
	36.00	19.44 , 88.55
	62.00	50.43 , 83.15 / 102.85 , 135.57
	88.00	79.48 , 98.01 / 165.19 , 184.52
	114.00	107.50 , 121.46 / 220.53 , 234.50
	140.00	134.93 , 145.55 / 274.45 , 285.06
	166.00	162.01 , 170.25 / 327.75 , 335.98
5.00	10.00	0.00 , 80.52
	36.00	0.00 , 121.44
	62.00	21.62 , 164.37
	88.00	54.99 , 209.01
	114.00	86.99 , 255.00
	140.00	117.94 , 177.34 / 242.45 , 302.05
	166.00	148.08 , 191.16 / 306.83 , 349.92
10.00	10.00	0.00 , 105.91
	36.00	0.00 , 146.10
	62.00	0.00 , 187.57
	88.00	33.76 , 230.24
	114.00	68.01 , 273.98
	140.00	101.33 , 318.67
	166.00	133.83 , 360.00
50.00	10.00	0.00 , 194.99
	36.00	0.00 , 234.00
	62.00	0.00 , 273.00
	88.00	0.00 , 312.00
	114.00	0.00 , 350.99
	140.00	30.00 , 360.00
	166.00	69.00 , 360.00

Einheiten: Prozentualer Fehler in Prozent
Hilfswinkel in Altgrad

ANHANG C

Tabelle 3

(Hilfswinkel, für die max. 5% Abweichung vom Sollwert auftritt)

ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL	ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL
1.00	0.00 , 66.86	46.00	0.26 , 137.73
2.00	0.00 , 68.36	47.00	1.62 , 139.38
3.00	0.00 , 69.87	48.00	2.97 , 141.03
4.00	0.00 , 71.38	49.00	4.32 , 142.68
5.00	0.00 , 72.90	50.00	5.67 , 144.33
6.00	0.00 , 74.41	51.00	7.01 , 145.98
7.00	0.00 , 75.94	52.00	8.35 , 147.64
8.00	0.00 , 77.46	53.00	9.69 , 149.30
9.00	0.00 , 78.99	54.00	11.03 , 150.97
10.00	0.00 , 80.52	55.00	12.36 , 152.64
11.00	0.00 , 82.05	56.00	13.69 , 154.30
12.00	0.00 , 83.59	57.00	15.02 , 155.98
13.00	0.00 , 85.13	58.00	16.35 , 157.65
14.00	0.00 , 86.68	59.00	17.67 , 159.33
15.00	0.00 , 88.22	60.00	18.99 , 161.01
16.00	0.00 , 89.77	61.00	20.31 , 162.69
17.00	0.00 , 91.33	62.00	21.62 , 164.37
18.00	0.00 , 92.88	63.00	22.93 , 166.06
19.00	0.00 , 94.44	64.00	24.24 , 167.65
20.00	0.00 , 96.01	65.00	25.55 , 169.44
21.00	0.00 , 97.57	66.00	26.86 , 171.14
22.00	0.00 , 99.14	67.00	28.16 , 172.84
23.00	0.00 , 100.72	68.00	29.46 , 174.54
24.00	0.00 , 102.79	69.00	30.76 , 176.24
25.00	0.00 , 103.87	70.00	32.05 , 177.94
26.00	0.00 , 105.45	71.00	33.35 , 179.65
27.00	0.00 , 107.04	72.00	34.64 , 181.36
28.00	0.00 , 108.63	73.00	35.93 , 183.07
29.00	0.00 , 110.22	74.00	37.21 , 184.78
30.00	0.00 , 111.81	75.00	38.50 , 186.50
31.00	0.00 , 113.41	76.00	39.78 , 188.22
32.00	0.00 , 115.01	77.00	41.06 , 189.94
33.00	0.00 , 116.62	78.00	42.34 , 191.66
34.00	0.00 , 118.22	79.00	43.61 , 193.38
35.00	0.00 , 119.83	80.00	44.88 , 195.11
36.00	0.00 , 121.44	81.00	46.15 , 196.84
37.00	0.00 , 123.06	82.00	47.42 , 198.57
38.00	0.00 , 124.68	83.00	48.99 , 200.31
39.00	0.00 , 126.30	84.00	49.95 , 202.04
40.00	0.00 , 127.93	85.00	51.22 , 203.78
41.00	0.00 , 129.55	86.00	52.48 , 205.52
42.00	0.00 , 131.18	87.00	53.73 , 207.26
43.00	0.00 , 132.82	88.00	54.99 , 209.01
44.00	0.00 , 134.45	89.00	56.24 , 210.75
45.00	0.00 , 136.09	90.00	57.50 , 212.50

Tabelle 3 II

(Hilfswinkel, für die max. 5% Abweichung vom Sollwert auftritt)

ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL	ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL
91.00	58.75 , 214.25	109.00	80.93 , 246.06
92.00	59.99 , 216.00	110.00	82.15 , 247.85
93.00	61.24 , 217.76	111.00	83.36 , 249.63
94.00	62.48 , 219.51	112.00	84.57 , 251.42
95.00	63.73 , 221.27	113.00	85.78 , 253.21
96.00	64.97 , 223.03	114.00	86.99 , 255.00
97.00	66.21 , 224.79	115.00	88.20 , 256.79
98.00	67.44 , 226.55	116.00	89.41 , 258.59
99.00	68.68 , 228.32	117.00	90.61 , 260.38
100.00	69.91 , 230.09	118.00	91.82 , 262.18
101.00	71.14 , 231.85	119.00	93.02 , 263.98
102.00	72.37 , 233.62	120.00	94.22 , 265.77
103.00	73.60 , 235.40	121.00	95.42 , 267.58
104.00	74.82 , 237.17	122.00	96.62 , 269.38
105.00	76.05 , 238.95	123.00	97.81 , 271.18
106.00	77.27 , 240.72	124.00	99.01 , 272.99
107.00	78.49 , 242.50	125.00	100.20 , 274.79
108.00	79.71 , 244.28	126.00	101.39 , 276.60

ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL
127.00	102.88 , 183.75 / 197.75 , 278.41
128.00	103.77 , 180.77 / 203.23 , 280.22
129.00	104.96 , 179.35 / 207.65 , 282.03
130.00	106.15 , 178.42 / 211.58 , 283.85
131.00	107.33 , 177.78 / 215.21 , 285.66
132.00	108.52 , 177.36 / 218.64 , 287.48
133.00	109.70 , 177.08 / 221.91 , 289.30
134.00	110.88 , 176.93 / 225.07 , 291.11
135.00	112.06 , 176.87 / 228.13 , 292.94
136.00	113.24 , 176.89 / 231.11 , 294.76
137.00	114.42 , 176.97 / 234.03 , 296.58
138.00	115.59 , 177.11 / 236.88 , 298.40
139.00	116.77 , 177.31 / 239.69 , 300.23
140.00	117.94 , 177.54 / 242.45 , 302.05
141.00	119.11 , 177.82 / 245.18 , 303.88
142.00	120.29 , 178.13 / 247.87 , 305.71
143.00	121.46 , 178.47 / 250.52 , 307.54
144.00	122.62 , 178.84 / 253.15 , 309.37
145.00	123.79 , 179.24 / 255.76 , 311.20
146.00	124.96 , 179.66 / 258.34 , 313.03
147.00	126.13 , 180.10 / 260.90 , 314.87
148.00	127.29 , 180.56 / 263.44 , 316.70
149.00	128.45 , 181.04 / 265.96 , 318.54
150.00	129.62 , 181.54 / 268.46 , 320.38

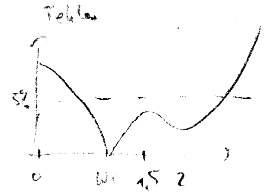
ANHANG C

Tabelle 3 III

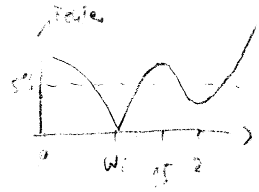
(Hilfswinkel, für die max. 5% Abweichung vom Sollwert auftritt)

ZU DRITTELNDER WINKEL	BENÖTIGTER HILFSWINKEL
151.00	130.78 , 182.58 / 270.95 , 322.22
152.00	131.94 , 182.58 / 273.42 , 324.06
153.00	133.10 , 183.12 / 275.87 , 325.90
154.00	134.26 , 183.68 / 278.32 , 327.74
155.00	135,41 , 184.25 / 280.75 , 329.58
156.00	136.57 , 183.83 / 283.17 , 331.42
157.00	137.73 , 185.42 / 285.58 , 333.27
158.00	138.88 , 186.63 / 287.97 , 335.12
159.00	140.03 , 186.63 / 290.36 , 336.96
160.00	141.18 , 187.25 / 292.74 , 338.81
161.00	142.34 , 187.89 / 295.11 , 340.66
162.00	143.49 , 188.53 / 297.47 , 342.51
163.00	144.64 , 189.17 / 299.82 , 344.36
164.00	145.78 , 189.83 / 302.17 , 346.21
165.00	146.93 , 190.49 / 304.50 , 348.06
166.00	148.08 , 191.16 / 306.93 , 349.92
167.00	149.22 , 191.84 / 309.15 , 351.77
168.00	150.37 , 192.53 / 311.47 , 353.63
169.00	151.51 , 193.22 / 313.78 , 355.48
170.00	152.66 , 193.91 / 316.08 , 357.34
171.00	153.80 , 194.61 / 318.38 , 359.20
172.00	154.94 , 195.32 / 320.67 , 360.00
173.00	156.08 , 196.03 / 322.96 , 360.00
174.00	157.22 , 196.75 / 325.24 , 360.00
175.00	158.36 , 197.48 / 327.52 , 360.00
176.00	159.50 , 198.20 / 329.79 , 360.00
177.00	160.63 , 198.94 / 332.06 , 360.00
178.00	161.77 , 199.67 / 334.32 , 360.00
179.00	162.90 , 200.42 / 336.58 , 360.00

```
10 PI=3.14152654# : UR=PI/180
15 S$(0)="absoluten":S$(1)="prozentualen"
20 DEF FNG(Y,B)=2*ATN(SIN(Y/6)*TAN(B/2)/(SIN(Y/2)+2*SIN(Y/3)*SIN(Y/6)*TAN(B/2)))
30 REM **************
40 REM * hauptmenue *
50 REM **************
60 CLS
70 LOCATE 6,12
80 PRINT"Unter folgenden Menüpunkten können sie wählen :"
90 LOCATE 8,2
100 PRINT"1. Berechnung des absoluten Fehlers sowie des prozentualen Fehlers."
110 LOCATE 10,2
120 PRINT"2. Berechnung derjenigen Winkel, die eine bestimmte Abweichung bzgl."
130 PRINT"    des absoluten oder prozentualen Fehlers aufweisen."
140 A$=INKEY$
150 IF A$="1"THEN P=1 : GOTO 180
160 IF A$="2" THEN P=2 : GOTO 180
170 GOTO 140
180 ON P GOSUB 230,~~460~~ 500
190 GOTO 60
200 REM **********************************
210 REM * unterprogramm fehlerberechnung *
220 REM **********************************
230 CLS
240 INPUT" Welchen Winkel wollen Sie dritteln (Angabe in Altgrad!) ";WI
245 PRINT
250 PRINT " Für welchen Bereich wollen Sie den Hilfswinkel untersuchen ?"
260 PRINT " Geben Sie durch Komma getrennt zuerst den kleinsten und"
270 PRINT " anschließend den größten Wert an, den der Hilfswinkel an-"
280 INPUT " nehmen soll";MI,MA
290 PRINT
300 PRINT " Mit welcher Schrittweite soll in diesem Bereich der Hilfs-"
310 INPUT " winkel variiert werden";SW
320 GOSUB 1050
330 B=WI*UR
340 FOR Y = MI TO MA STEP SW
345 IF Y=0 OR Y=360 THEN 420
350 KON.WIN=FNG(Y*UR,B)/UR
360 ABS.FEHLER=ABS(KON.WIN-WI/3)
370 PRO.FEHLER=300*ABS.FEHLER/WI
380 PRINT USING "    ###.##";Y;
390 PRINT USING "      ###.#####";KON.WIN;
400 PRINT USING "             ###.######";ABS.FEHLER;
410 PRINT USING "         ###.######";PRO.FEHLER
420 IF D=18 OR Y=MA THEN A$=INKEY$ : IF A$="" THEN 420 ELSE GOSUB 1050
430 D=D+1
440 NEXT Y
450 RETURN
470 REM ****************************************
480 REM * unterprogramm 2 : winkelbestimmung *
490 REM ****************************************
500 INPUT" Welchen Winkel wollen Sie dritteln (Angabe in Altgrad!)";WI
510 PRINT " Wollen Sie die Untersuchung bzgl. des (a)bsoluten Fehlers"
520 INPUT " oder des (p)rozentualen Fehler durchführen"; A$
530 IF A$ = "p" THEN J=1 : GOTO 560
540 IF A$ = "a" THEN J=0 : GOTO 560
550 GOTO ~~460~~ 500
560 PRINT
570 INPUT " Welche max. Abweichung soll bei der Konstruktion auftreten";AB
600 ~~PRINT~~
```



Normalfall:




```
600 PRINT
640 GN=4
660   Z=1        damit Nenner ≠ 0
670   FOR T = 1 TO 4 : RW(T)=0 : NEXT T
680   G1= .001 : G2=WI : V=1 : GOSUB 860
690   G1=1.5*WI : G2= WI : V=-1 : GOSUB 860
700   IF H=0 AND RW(1)<>RW(2) THEN Z=Z-1 : GOTO 720
710   G1 = 1.5*WI : G2 = 2*WI : V=1 : GOSUB 860
720   G1 = 360 : G2=2*WI
730   IF G1<G2 THEN RW(4)=360 : GOTO 750   ? Warum
740   V=-1 : GOSUB 860
750   IF RW(1)=.001 THEN RW(1)=0     Wi = 0°
755 CLS
760 PRINT "Max. Abweichung des "S$(J)" Fehlers:"AB
762 PRINT
765 PRINT"Ihr Hilfswinkel sollte in folgendem Intervall liegen:"
767 PRINT
770   PRINT SPC(8) RW(1)" <= y <="RW(2);
780   IF RW(3)<>0 THEN PRINT RW(3)" <= y <="RW(4)
790   PRINT
800 A$ = INKEY$ : IF A$=""THEN 800
820 RETURN
830 REM ****************************************
840 REM * unterprogramm intervallschachtelung *
850 REM ****************************************
855 H=0
860 B% = ( ABS(FNG(G1*UR,WI*UR)/UR-WI/3)/(J*WI/3-J+1)*(J*100+1-J) <= AB)
870 IF B% THEN RW(Z)=G1 : Z=Z+1 : H=0 : RETURN
880 I=-LEN(STR$(INT(G2-G1)))+2
890 WHILE I=<GN+1
900   IF G1=0 THEN G1=.001
905   IF G2=G1 THEN I=10 : GOTO 990       36 ?
910   G3= 10^-I : H=0
920   FOR T=G1 TO G2 STEP G3*V
930     B% = ( ABS(FNG(T*UR,WI*UR)/UR-WI/3)/(J*WI/3-J+1)*(100*J-J+1) <= AB)
940     IF B% THEN H1=T-G3*V : H2=T : T=G2 : H=1
950     IF T=.001 THEN T=0
960   NEXT T
970   IF H=0 THEN H1=T-G3*V : H2=G2
980   G1=H1 : G2=H2 : I=I+1 : GOTO 890
990 WEND
1000 RW(Z)=G2 : Z=Z+1
1010 RETURN
1020 REM *****************
1030 REM * hilfsprogramm *
1040 REM *****************
1050 CLS
1060 D=0
1065 IF Y=MA THEN RETURN
1070 PRINT USING " Zu drittelnder Winkel : ###.##";WI
1080 PRINT USING " Rechnerisches Drittel : ###.##";WI/3
1090 PRINT : PRINT" Hilfswinkel  konstruierter Winkel  absoluter Fehler  prozent
ualer Fehler"
1100 RETURN
```

LITERATURVERZEICHNIS

Barth, Mühlbauer, Nikol, Wörle , Mathematische Formeln und Definitionen , erschienen im Bayerischen Schulbuch-Verlag, 1985